

Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.

Занятия № 8-9. Повторение материала прошлого семестра: основные формулы и понятия квантовой механики.

1. Длина волны Де-Бройля.
2. Волновая функция. Физический смысл волновой функции.
3. Определение эрмитова оператора. Уравнение на собственные функции и собственные значения. Свойства собственных функций и собственных значений эрмитова оператора.
4. Определение коммутатора двух операторов.
5. Среднее значение оператора физической величины.
6. Волновое уравнение Шредингера.
7. Стационарное уравнение Шредингера. Оператор Гамильтона.
8. Операторы координаты и импульса.
9. Гамильтониан гармонического осциллятора.
10. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса.
11. Понятие спина. Принцип Паули.
12. Качественно пояснить характер движения частицы в поле с потенциальной энергией $U(x)$ заданного вида.

Новая тема: Оператор углового момента. Коммутационные соотношения. Собственные функции и собственные значения операторов \hat{L}_z и \hat{L}^2 . «Лестничные операторы».

1. Оператор углового момента.

1.1. Определение оператора углового момента \hat{L} в декартовых координатах:

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}; \quad \hat{r} = \vec{r}, \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}},$$

В тензорных обозначениях:

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k,$$

ε_{ijk} – символ Леви-Чивита.

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x,$$
$$\vec{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2.$$

Задача 1. Проверить коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{x}_k; \quad \left[\hat{L}_i, \hat{p}_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{p}_k; \quad \left[\hat{L}_i, \hat{L}_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k; \quad \left[\vec{L}^2, \hat{L}_i \right] = 0.$$

Задача 2. Вычислить $[\hat{L}_i, \hat{r}^2]$ (Из ГКК № 3.4(a))

1.2. Безразмерный оператор углового момента \hat{l} :

$$\hat{l} = \frac{1}{\hbar} \hat{L}; \quad [\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{l}_{jk}; \quad [\hat{l}^2, \hat{l}_i] = 0.$$

1.3. Операторы \hat{l}_z и \hat{l}^2 в сферических координатах:

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \hat{l}^2 = -\Delta_{\theta\varphi} = -\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

1.4. Собственные функции и собственные значения операторов \hat{l}_z и \hat{l}^2 :

$$\hat{l}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$\hat{l}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

l – орбитальное квантовое число, m – магнитное квантовое число.

Сферические функции: $Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} P_l^m(\theta) e^{im\varphi}$;

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} P_l(\cos \theta); \quad P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d \cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l,$$

где $P_l^m(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, $P_l(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра,

C_{lm} – нормировочная константа.

1.4. «Лестничные операторы» \hat{l}_{\pm} :

$$\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i \hat{l}_y.$$

Задача 3. Проверить коммутационные соотношения

$$[\hat{l}_z, \hat{l}_\pm] = \pm \hat{l}_\pm; \quad [\hat{l}_+, \hat{l}_-] = 2\hat{l}_z.$$

Задача 4. Показать, что $\hat{l}_\pm \psi_m$, где ψ_m – собственные функции оператора \hat{l}_z z-проекции углового момента ($\hat{l}_z \psi_m = m \psi_m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), также являются собственными функциями оператора \hat{l}_z с собственными значениями $m+1$ и $m-1$ для \hat{l}_+ и \hat{l}_- соответственно (ГКК №3.11)

Задача 5. Найти собственные значения оператора \hat{l}^2 . Использовать коммутационные соотношения из **задачи 3.**

Задача 6. В состоянии ψ_m с определенной проекцией углового момента на ось z вычислить средние значения $\overline{l_x}, \overline{l_y}, \overline{l_z}, \overline{l_x l_y}, \overline{l_y l_x}, \overline{l_x^2}, \overline{l_y^2}, \overline{l_z^2}$. (ГКК №3.12)

Домашнее задание ГКК № 3.4(а), ГКК № 3.12 (закончить), 3.13, 3.14.

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984